Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

591011

Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl.

In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m\cdot(x-5)+2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B.

Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5,2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.

b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck OAB in die Teildreiecke OPB und OAP.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.

d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl?
(Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (sodass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591012

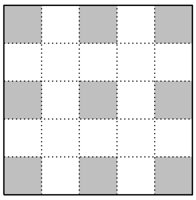
Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die n, $n+4$ und $n+8$ Primzahlen sind.

591013

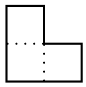
Zeigen Sie: Wenn sich die Winkelhalbierenden von drei Innenwinkeln eines konvexen Vierecks $ABCD$ in einem Punkt P schneiden, dann liegt P auch auf der vierten Innenwinkelhalbierenden.

591014

In Abbildung A 591014 a ist ein Quadrat aus 25 Feldern gegeben. Diese Figur soll mit (zueinander kongruenten) L-Steinen ausgelegt werden, wobei ein spezielles Feld vorher entfernt wird. Ein L-Stein besteht aus drei in L-Form angeordneten quadratischen Feldern (siehe Abbildung A 591014 b).



A 591014 a



A 591014 b

a) Aus dem Quadrat wird eines der grauen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur mit 8 L-Steinen legen lässt.
b) Aus dem Quadrat wird eines der weißen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur nicht mit 8 L-Steinen legen lässt.

591015

Für ein Zufallsexperiment stehen vier rote und vier blaue Kugeln zur Verfügung. Zu Beginn befinden sich vier der acht Kugeln in einer Urne, die anderen vier dienen als Vorrat. In jedem Schritt des Zufallsexperiments wird nun eine Kugel aus der Urne zufällig gezogen und gegen eine Kugel der anderen Farbe aus dem Vorrat getauscht.

a) Zu Beginn befinden sich nur rote Kugeln in der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die fünfte gezogene Kugel rot?
b) Zu Beginn sind jetzt zwei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind nach 10 Schritten wieder zwei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591016

a) Entscheiden Sie (ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners), welche der folgenden Zahlen $t = 1\,125$, $u = 1\,225$, $v = 111\,225$ und $w = 112\,225$ Quadratzahlen sind.
Geben Sie gegebenenfalls die Zahlen an, deren Quadrate vorliegen.

b) Die ganze Zahl

$$a = \underbrace{11\ldots11}_{2\,018}\underbrace{22\ldots22}_{2\,019}5$$

besteht (im üblichen Zehnersystem) aus 4 038 Ziffern, und zwar 2 018 Einsen, 2 019 Zweien und einer Fünf.
Zeigen Sie, dass die Zahl a eine Quadratzahl ist, und geben Sie die Zifferndarstellung der Zahl b mit $b^2 = a$ an.